

引用格式: 徐若辰, 钟任新. 基于动态投影系统的带非线性边界约束混行路网均衡模型求解算法[J]. 科学技术与工程, 2019, 19(12): 325-332  
Xu Ruochen, Zhong Renxin. A projected dynamics system based solution algorithm for mixed network equilibrium model with nonlinear side constraints[J]. Science Technology and Engineering, 2019, 19(12): 325-332

# 基于动态投影系统的带非线性边界约束 混行路网均衡模型求解算法

徐若辰 钟任新\*

(中山大学智能工程学院, 广州 510006)

**摘要** 针对路网中考虑电动汽车出行能耗与燃油汽车环境排放情形下混合交通流的非线性边界约束路网均衡问题,设计了一种基于动态投影系统的算法。将复杂非线性边界约束的双车型路网均衡模型转换成变分不等式模型,利用拉格朗日乘子法得到模型的库恩塔克(KKT)条件以及模型的非线性互补问题,通过引入投影算子建立动态投影系统找到模型的最优解。分析模型可确定燃油汽车和电动汽车一般出行成本函数,电动汽车混行条件下交通网络的均衡条件,以及路网均衡条件下两种车型的拥堵外部性并获取混合交通流下路网的运行特征。最后构建数值仿真评估动态投影算法的有效性,结果表明模型收敛于系统的平衡点,且具有指数收敛性质。

**关键词** 动态投影算法 变分不等式 非线性边界约束 混合交通流  
**中图分类号** U121; **文献标志码** A

近年来,由于对温室效应、交通安全以及路网通行效率的关注日益增加,政府不断实施各种措施减轻路网中由交通排放引起的污染。随着电池技术不断发展,电动汽车开始受到广泛关注。中国科技部发布数条关于电动汽车的国家重点研发计划,不断加大对电动汽车研究的投入以及民众购买电动汽车的补贴力度,电动汽车已逐渐成为汽车发展的趋势。因此,为实现绿色发展,健康出行,电动汽车已经成为交通路网中的主要车型之一。

近年来,在共享汽车发展迅猛的背景下,电动汽车分时租赁的调度策略将电池能量消耗作为保障系统运行效率和质量的重要因素<sup>[1]</sup>。目前考虑电动汽车混合交通流的交通网络分配问题受到学者们的广泛关注。交通领域中,带有复杂非线性边界约束的路网均衡问题很难找到一种收敛速度快的算法以获得模型的最优解。在单车型均衡模型求解算法的研究中,He等<sup>[2]</sup>提出考虑电动汽车能量消耗与交通状态呈线性关系,他们将其转化成凸规划问题后直

接采用优化问题商业软件对模型进行求解,但求解过程会产生混合整数优化的子问题,且该子问题的求解往往是一个非确定性多项式时间复杂(non-deterministic polynomial-time hard, NP-hard)问题。对于双车型均衡模型的分析与求解, Jiang等<sup>[3]</sup>结合基于Jacob形式的线形逼近算法和基于Gauss-Seidel分解形式的二次逼近算法,用来求解基于路径长度约束的路网均衡模型。Xu等<sup>[4]</sup>提出用Frank-Wolf算法求解带有非线性道路等级约束的模型。为了简化模型求解,他们均未考虑燃油汽车的环境排放约束,这与实际存在一定差距。因此,前人对带有复杂非线性边界约束的混合交通流路网均衡问题的求解,尚未研究一个更有效且收敛速度更快的算法。而对于模型的建模与分析,没有真正反映出电动汽车能量消耗、燃油汽车环境排放与交通状态之间存在非线性的映射关系,并不能真正反映电动汽车与燃油汽车混合条件下路网的运行特征。

因此,在探讨电动汽车混行条件下路网均衡分配模型建立的基础上,设计了一种更为有效收敛速度更快且基于动态投影系统的算法,并进行收敛性分析,以获得路网达到平衡状态时各路段的流量以及出行成本。另外,对于模型的分析,分别确定了电池能量消耗、环境排放与交通状态之间的非线性映射关系,通过对模型最优条件的推导确定路网平衡状态下电动汽车出行能耗以及燃油汽车环境排放对流量和出行成本的影响。

2018年11月22日收到 国家自然科学基金(U181140007)和  
国家重点研发计划战略性国际科技  
创新合作重点专项(2016YFE0206800)资助

第一作者简介:徐若辰,硕士研究生。E-mail: xurch3@mail2.sysu.edu.cn。

\*通信作者简介:钟任新,博士,副教授。研究方向:城市交通系统建模、动态交通分配理论、统计与机器学习及数据挖掘。E-mail: zhrenxin@mail.sysu.edu.cn。

# 1 问题描述

考虑电动汽车与燃油汽车混行条件下的路网稳定性分析本质上属于路网均衡分配问题。但不同于传统的路网均衡分配问题,实际中存在电动汽车和燃油汽车两种车型。对于电动汽车而言,出行过程中的路径选择必须考虑其电池的能量情况,由于行驶里程短会对电动汽车驾驶人造成心理负担,从而会对路径选择行为产生影响<sup>[5]</sup>;而电池能量的消耗与交通状态之间存在非线性相关关系。另一方面,路网中也存在大量的燃油汽车,如何分析两种车型之间的相互影响是研究难点。此外,在路网均衡分配问题中,起点-终点(origin-destination, O-D)间出行需求是固定的,如果路径的出行成本可由路段累加而成,带有边界约束的交通分配问题可以转换成基于路段的变分不等式问题<sup>[6]</sup>。本模型是传统路网均衡分配问题上的延伸,对于两种交通流而言,往往会选择一条出行成本最小的路径完成出行。在建立模型之前,给出如下定义和假设。

首先,对 O-D 间电动汽车的有效路径进行定义:电动汽车选择一条路径并能够在其电池能量消耗完之前完成出行,那么这条路径为有效路径。图 1 为一个简单路网来解释上述定义。假设路段 1-2、2-4、1-4、1-3 以及 3-4 上的电池能量消耗分别为 12、12、33、14、14 kW·h<sup>-1</sup>,电池满载功率为 30 kW·h<sup>-1</sup>,并且路网中无充电站或充电道路的存在。电动汽车从起点 1 可以经过 3 条路径到达终点 4,根据这三条路径消耗的能量判断,路径 1-2-4 和 1-3-4 为有效路径,而 1-4 为无效路径。

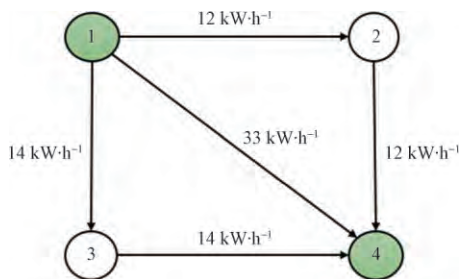


图 1 带有 4 节点的简单路网

Fig. 1 A simple network with four nodes

对于路段上的行程时间,假设对于路网中的任何路段  $a$ ,其行程时间函数  $t_a(v_a)$  是可分离的,且随着路段上的流量  $v_a$  严格单调递增的连续可导凸函数。那么路径  $p$  上的行程时间则为

$$c_p = \sum_{a \in A} t_a(v_a) \delta_p^a, \quad p \in P \quad (1)$$

式(1)中:  $\delta_p^a$  为 Kronecker Delta 函数;  $t_a(v_a)$  为美国联邦公路局(Bureau of Public Roads, BPR)行程时

间函数:

$$t_a(v_a) = t_{a0} \left[ 1 + \beta \left( \frac{v_a}{C_a} \right)^\alpha \right], \quad \forall a \in A \quad (2)$$

# 2 混合交通流路网均衡模型

## 2.1 符号定义

定义电动汽车混行条件下的道路交通网络图  $G(N, A)$ ,其中  $N$  为节点集合,  $A$  为路段集合,其中路段  $a \in A$  以及它的起点和终点  $a = (i, j) \in A$ ;  $\omega$  为每次出行的 O-D 集合,路网中的路径由各个相连有序路段组成,  $P$  为 O-D 对  $\omega \in W$  之间各条路径的集合;  $f_{gas, p}$  与  $f_{ev, p}$  分别表示 O-D 对  $\omega \in W$  路径上  $p$  燃油汽车和电动汽车的流量向量,  $v_a^{ev}$  和  $v_a^{gas}$  则表示路段  $a \in A$  上电动汽车与燃油汽车的流量向量;  $d$  为出行需求,  $d_\omega$  表示 O-D 对  $\omega$  之间出行需求,  $\beta_\omega$  表示 O-D 间电动汽车渗透率;  $\delta_p^a$  为判断  $a$  是否在路径  $p$  上的 0-1 变量,当路段  $a$  在路径  $p$  上,  $\delta_p^a = 1$ ,否则  $\delta_p^a = 0$ ;为了保证模型在该路网的可行性,假设路网中每个 O-D 对  $\omega \in W$  之间至少存在一条从  $k$  到  $l$  的有向路径。

## 2.2 模型的建立与平衡条件的分析

对于电动汽车而言,能量消耗受限于电池容量,随所面临的交通状态而变化,因此必须找出能量消耗与交通状态之间的映射关系。静态交通分配理论框架指出,路网交通状态由流量反映,而车辆速度的大小可以反映流量状况,故能量消耗与车辆的速度是直接相关的。对该映射关系的研究, Galus 等<sup>[7]</sup>利用现实数据对能量消耗与速度之间的映射关系进行校准。采用静态交通理论框架,以道路上的平均速度作为反映道路拥挤程度的参数,图 2 为电池平均能量消耗与不同速度之间的关系曲线。在中国,主干道上速度限制为 60 km/h,由图 2 中 60 km/h 曲线可以看出,电动汽车能量消耗与速度呈指数相关关系。

因此,假设路段  $a$  上能量消耗为

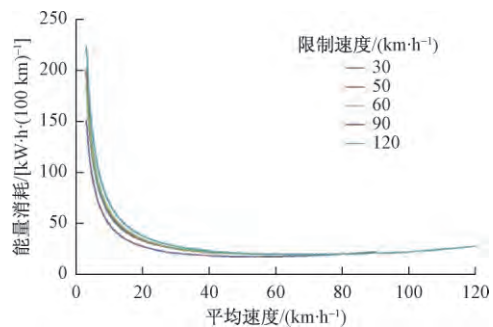


图 2 平均能量消耗曲线

Fig. 2 Average energy consumption curves

$$E_s^a(s_a) = \frac{k_a}{s_a^\alpha} \quad (3)$$

式(3)中:  $s_a$  为路段  $a$  上的平均速度;  $k_a$  和  $\alpha$  均为固定数。根据物理学知识, 路段行程时间  $t_a = \frac{L_a}{s_a}$ ,  $L_a$  为路段  $a$  的长度, 能量消耗的单位为  $\text{kW} \cdot \text{h}^{-1} / 100 \text{ km}$ , 统一路段长度  $\bar{L}_a \triangleq L_a / 100 \text{ km}$ , 电动汽车穿过路径  $p$  时能量消耗为

$$E_p = \sum_{a \in A} E_i^a(t_a) \bar{L}_a \delta_a^p = \sum_{a \in A} \bar{\gamma}_a t_a^\alpha(v_a) \delta_a^p, \quad p \in P \quad (4)$$

式(4)中:  $\bar{\gamma}_a \triangleq \gamma_a \bar{L}_a$  是常数项; 电池容量  $E_i$  是固定值, 且  $E_p < E_i$ , 假设所有电池型号均一致, 能量约束可写为

$$\sum_{a \in A} \bar{\gamma}_a t_a^\alpha(v_a) \delta_a^p \leq E \quad (5)$$

式(5)中:  $E$  为电池容量。根据问题描述中的假设, 式(5)是连续可导的凸函数。

为控制燃油汽车环境排放也有利于电动汽车快速发展和广泛应用, 在交通管理政策中, 应该分析由燃油汽车环境排放引起的拥堵外部性, 将环境排放作为模型中反映路网运行特征的另一个重要约束。根据 Chen 等<sup>[8]</sup>的研究, 环境约束函数为

$$e(v_a) v_a^{\text{gas}} \leq E_a, \quad \forall a \in A \quad (6)$$

式(6)中:  $E_a$  为交通规划者决定的环境排放门槛。式(6)可以控制区域中路段的环境排放防止环境恶化。用交通规划的知识来分析模型, 与该约束相关的拉格朗日乘子可被解释为由排放引起的边际成本, 即出行者使用该环境保护路段时必须支付的额外费用。

研究中环境排放约束和能量消耗约束对于路网运行特征的分析是不同的, 式(5)是对电动汽车基于路径的约束, 式(6)则是燃油汽车基于路段的约束。综合静态交通分配理论框架, 路网中两种车型的出行选择可描述成含有混合交通流的路网均衡问题:

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} t_a(w) dw \quad (7)$$

s. t.

$$v_a = v_a^{\text{gas}} + v_a^{\text{ev}}, \quad \forall a \in A \quad (8)$$

$$v_a^{\text{gas}} = \sum_{p \in P} f_{\text{gas } p} \delta_a^p, \quad \forall a \in A \quad (9)$$

$$v_a^{\text{ev}} = \sum_{p \in P} f_{\text{ev } p} \delta_a^p, \quad \forall a \in A \quad (10)$$

$$\sum_{p \in P} f_{\text{gas } p} = (1 - \beta_\omega) d_\omega, \quad \omega \in W \quad (11)$$

$$\sum_{p \in P} f_{\text{ev } p} = \beta_\omega d_\omega, \quad \omega \in W \quad (12)$$

$$\left[ \sum_{a \in A} \bar{\gamma}_a t_a^\alpha(v_a) \delta_a^p - E \right] f_{\text{ev } p} \leq 0, \quad \forall p \in P \quad (13)$$

$$e(v_a) v_a^{\text{gas}} - E_a \leq 0, \quad \forall a \in A \quad (14)$$

根据非线性规划中 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件的知识<sup>[9]</sup> 以及用户均衡模型平衡分配原理的分析过程<sup>[10]</sup>, 可以推导得到两种车型的路径行程时间分别为

$$\begin{cases} c_{\text{gas } p}(v_a) = \sum_{a \in A} \left[ t_a(v_a^*) + \eta_a^{\text{gas}} \frac{\partial e(v_a^*)}{\partial v_a^*} v_a^{\text{gas},*} + \eta_a^{\text{gas}} e(v_a^*) \right] \delta_a^p \\ c_{\text{ev } p}(v_a) = \sum_{a \in A} \left[ t_a(v_a^*) + \eta_a^{\text{gas}} \frac{\partial e(v_a^*)}{\partial v_a^*} v_a^{\text{gas},*} \right] \delta_a^p \\ \forall \omega \in P \end{cases} \quad (15)$$

假设  $(f_{\text{ev } p}^*, f_{\text{gas } p}^*)$  分别为基于路段环境排放约束以及基于路径能量消耗约束的混合交通流路网均衡模型的最优解, 那么下述与拉格朗日乘子相关的平衡条件则一定存在:

$$\begin{cases} \begin{cases} c_{\text{gas } p} = \mu_\omega^{\text{gas}}, & f_{\text{gas } p}^* > 0 \\ c_{\text{gas } p} > \mu_\omega^{\text{gas}}, & f_{\text{gas } p}^* = 0 \end{cases}, \quad \forall \omega \in P \\ \begin{cases} c_{\text{ev } p} = \mu_\omega^{\text{ev}} \\ \sum_{a \in A} t_a^\alpha(v_a) \delta_a^p \bar{\gamma}_a \leq E, & f_{\text{ev } p}^* > 0 \\ \rho_p^{\text{ev}} = 0 \end{cases}, \quad \forall \omega \in P \\ c_{\text{ev } p} + \rho_p^{\text{ev}} \left[ \sum_{a \in A} t_a^\alpha(v_a) \delta_a^p \bar{\gamma}_a - E \right] > \mu_\omega^{\text{ev}}, \\ f_{\text{ev } p}^* = 0 \end{cases} \quad (16)$$

式(16)中:  $\mu_\omega^{\text{gas}}$ 、 $\mu_\omega^{\text{ev}}$ 、 $\rho_p^{\text{ev}}$  和  $\eta_a^{\text{gas}}$  分别为约束条件式(11)~式(14)对应的拉格朗日乘子向量,  $\eta_a^{\text{gas}} \nabla e(v_a^*) v_a^{\text{gas},*}$  类似于系统最优理论中路网达到平衡状态下的边际成本。如果电动汽车的电池没有电量, 无论出行者是否愿意支付这个额外成本, 它都无法完成此次出行。换句话说, 电动汽车将导致交通网络拥堵的外部性, 从而增加行程时间。反之, 行程时间的增加又会造成更多的环境排放, 因此将  $\eta_a^{\text{gas}} e(v_a^*)$  解释为燃油汽车造成额外环境排放的惩罚成本。根据上述平衡条件以及问题描述中定义的有效路径: 如果路径  $p$  上的最优流量  $f_{\text{ev } p}^* > 0$ , 即路网中的一条路径存在电动汽车, 该路径上能量消耗约束则不会被激活,  $\rho_p^{\text{ev}} = 0$ 。而当环境约束在某条路径上被激活时, 这条路径则不会被电动汽车选择, 也就是说这条路径不是 O-D 间的最优路径。式(16)中  $\mu_\omega^{\text{ev}}$  和  $\mu_\omega^{\text{gas}}$  分别被解释为 O-D 间电动汽车和燃油汽车的最小出行成本。在传统边界约束的交通分配问题分析中, 约束条件对应的拉格朗日乘子被解释成为在过饱和路段上出行的额外成本。例如与

约束条件式(14)所对应的拉格朗日乘子可解释为环境排放收费。因此,可以总结到基于路径的能量消耗约束和基于路段的环境排放约束能够更有利于分析电动汽车在混合交通情形下对路网的影响。

### 3 模型求解算法

在交通领域中,路网均衡问题通常被描述成变分不等式问题以便进一步的分析讨论。将动态梯度投影系统引入带有复杂非线性边界约束的交通分配问题求解过程中来。并且,该动态投影系统对于复杂非线性约束模型的求解具有有效性和鲁棒性。因此,对于提出的基于电动汽车非线性能量消耗约束以及燃油汽车非线性环境排放约束的混合交通流路网均衡模型,接下来将介绍基于动态投影的算法如何求解该模型,并对其收敛性分析。

#### 3.1 算法求解过程

步骤1 如果原始优化问题目标函数的梯度  $F(x)$  为连续的实函数,且可行域的集合为一个凸集。那么可将原始优化问题转换成带有线性和非线性约束的一般化变分不等式问题:

$$\begin{cases} F(x^*)^T(x-x^*) \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \\ \bar{\Omega} = \{x: Gx = b, g_i(x_i) \leq 0, x \geq 0\} \end{cases} \quad (17)$$

式(17)中:  $b$  是一个常数向量;  $x_i$  为  $x$  中的第  $i$  个元素。式(17)中等式形式的线性系统表示为路网 O-D 间流量守恒,而不等式系统表示模型中电动汽车的非线性能量消耗约束以及燃油汽车的非线性环境排放约束。假设式(17)中的变分不等式问题至少有一个最优解,那么  $g(x)$  与  $Gx - b$  的梯度形式在最优值点处线性无关,并且存在一个可行解  $x_0$  使得  $g(x_0) < 0$ 。

步骤2 分别引进变分不等式问题中等式约束和不等式约束对应的拉格朗日乘子向量  $\lambda$  和  $\mu$ , 且将变分不等式问题中可行域转换成箱型集合  $C = \{x \in R^n: 0 \leq x_i \leq u_i, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$ , 通过投影定理有:

$$\begin{cases} x = P_C\{x - \alpha F(x) + [\nabla g(x)]^T \lambda - G^T \mu\} \\ \lambda = [\lambda + g(x)]^+ \\ Gx = b \end{cases} \quad (18)$$

式(18)中:  $\alpha$  为大于 0 的常数;  $P_C$  为投影算子;  $\lambda^+ = (\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_m^+)$ , 且  $\lambda_i^+ = \max\{0, \lambda_i\} \triangleq \{\lambda_i\}_+$ 。根据所求得的可行解与约束条件对应的拉格朗日乘子向量则满足关系:

$$\begin{cases} (x-x^*)^T\{F(x^*) + [\nabla g(x^*)]^T \lambda^* - G^T \mu^*\} \geq 0, \quad \forall x \in C \\ Gx^* = b \\ 0 \leq \lambda_i^* \perp g(x^*) \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

步骤3 如果步骤2中所求得的变分不等式问题中的可行解  $x^*$ , 以及所求的约束条件对应的拉格朗日乘子向量满足  $\lambda^* \in R^m, \lambda_i \geq 0$  以及  $\mu^* \in R^r$ , 那么存在  $z^* = (x^*, \lambda^*, \mu^*) \in S_z$  是变分不等式与其约束的非线性互补问题  $G(z)$  的解, 其中  $S_z = \{z = (x, \lambda, \mu) \in R^{n+m+r}: x_i \geq 0, \lambda_i \geq 0\}$ , 并且非线性互补问题为

$$G(z) = \begin{pmatrix} \alpha\{F(x) + [\nabla g(x)]^T \lambda - G^T \mu\} \\ -g(x) \\ -(Gx - b) \end{pmatrix} \quad (20)$$

对于非线性互补问题  $G(z)$  而言, 同时存在  $z^* = (x^*, \lambda^*, \mu^*) \in S_z$  是  $G^T(z^*)(z - z^*) \geq 0$  的解。

步骤4 变分不等式问题式(17)的最优解以及约束条件相对应的最优拉格朗日乘子则由下列动态投影系统达到平衡时获得:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - P_C(x - \alpha\{F(x) + [\nabla g(x)]^T \lambda - G^T \mu\}) \\ \lambda - \bar{\lambda} \\ Gx - b \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} \lambda - \bar{\lambda} \\ Gx - b \end{pmatrix} \quad (21)$$

式(21)中:  $\bar{\lambda} \triangleq \{\lambda + g(x)\}_+$ 。

#### 3.2 算法收敛性分析

从以下四点展开对动态投影系统式(21)获得的最优解进行收敛性分析<sup>[11-13]</sup>。

(1) 动态投影系统式(21)至少存在一个平衡点, 且这个平衡点与博弈论中的纳什均衡一致, 例如变分不等式问题中满足 KKT 条件的点。

(2) 对任意初始点, 动态投影系统式(21)都存在唯一且连续的解。

(3) 令  $z(t)$  为动态投影系统式(21)的状态轨迹曲线, 其初始点  $z(t_0) = [x(t_0), \lambda(t_0), \mu(t_0)]^T$ , 如果  $z(t_0) \in S_z$ , 那么轨迹  $z(t) \in S_z$ , 并以指数的形式最终到达集合  $S_z$  附近, 如果  $x(t_0) \in C, \lambda(t_0) \geq 0$ , 那么  $x(t) \in C, \lambda(t) \geq 0$ 。

(4) 假设变分不等式问题目标函数的梯度  $\nabla F(x)$  在可行解集合  $\bar{\Omega}$  上是正定的, 那么动态投影系统中以任何初始点开始的状态轨迹曲线  $x(t)$  都会以指数的形式最终收敛于模型最优解  $x^*$ 。

提出的模型是带有复杂非线性边界约束的混合交通流路网均衡问题, 那么算法中  $x$  表示路段上两种车型的流量向量, 即  $x = (v_a: \forall a \in A)$ , 即  $x_{ev}$  和  $x_{gas}$  分别表示电动汽车与燃油汽车的流量。  $t = (t_a: \forall a \in A)$  为路段行程时间向量, 令  $k(x)$  为模型中

电动汽车的非线性能量消耗约束,  $h(x)$  为燃油汽车的非线性环境排放约束。等式约束为路网中的流量守恒。根据算法,至少存在下列拉格朗日乘子的集合,例如:  $\rho_{ev}^* = (\rho_p^{ev,*} : \forall p \in P)$ 、 $\eta_{gas}^* = (\eta_a^{gas,*} : \forall a \in A)$ 、 $\mu_{ev}^* = (\mu_{\omega}^{ev,*} : \forall \omega \in W)$  和  $\mu_{gas}^* = (\mu_{\omega}^{gas,*} : \forall \omega \in W)$ ,将原始优化问题转换成非线性互补问题后,存在非线性互补问题  $G(z)$  的解  $z^* = (x^*, \rho_{ev}^*, \eta_{gas}^*, \mu_{ev}^*, \mu_{gas}^*)$ ,令  $A$  表示为路网节点与路段之间的关联矩阵。根据算法的求解过程,转换后的非线性互补问题  $G(z)$  的最优解即为以下动态投影系统的均衡点:

$$\frac{dz}{dt} = -\eta \begin{pmatrix} x - P_C(x - \alpha(t(x) + [\nabla k(x)]^T \rho_{ev} + [\nabla h(x)]^T \eta_{gas} - A^T \mu_{ev} - A^T \mu_{gas})) \\ \rho_{ev} - \tilde{\rho}_{ev} \\ \eta_{gas} - \tilde{\eta}_{gas} \\ Ax_{ev} - \beta_{\omega} E_{\omega} d_{\omega} \\ Ax_{gas} - (1 - \beta_{\omega}) E_{\omega} d_{\omega} \end{pmatrix} \quad (22)$$

式(22)中:  $\tilde{\rho}_{ev} \triangleq \{\rho_{ev} + k(x)\}_+$ ;  $\tilde{\eta}_{gas} \triangleq \{\eta_{gas} + h(x)\}_+$ ; 向量  $E_{\omega}$  表示 O-D 之间起点与终点的列关联向量,例如  $k$  和  $l$  分别表示 O-D 间起点和终点,那么  $E_{\omega} = e_k - e_l$ ,  $e_k$  和  $e_l$  分别为第  $k$  以及第  $l$  单位向量。

根据算法收敛性分析,可以总结得到动态投影系统的状态轨迹会收敛于系统的平衡点,在模型中,如果原始优化问题的可行域是一个密闭的凸集,并且优化问题目标函数的梯度  $t_a(v_a)$  是与路段流量  $v_a$  相关的连续可导凸函数,那么该动态投影系统的平衡点也是原始优化问题的最优解。

### 4 数值算例

采用 Nguyen-Dupuis(N-D) 仿真路网,如图3所示,该路网由19条路段、13个节点及4个O-D对组

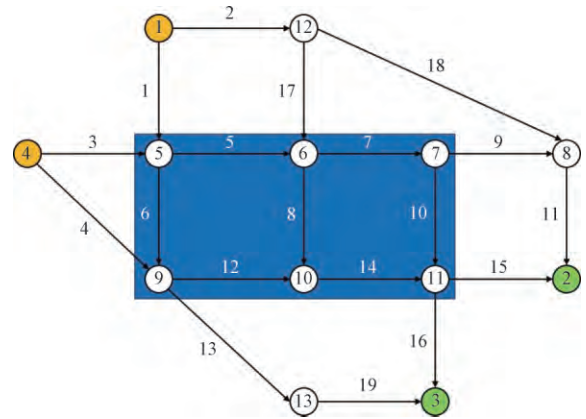


图3 仿真路网

Fig. 3 A hypothetical network

成,蓝色部分为环境保护区域,设置了一定的环境排放门槛。该采用 N-D 路网的数值仿真主要是用来验证动态投影算法对模型求解的有效性,同时也分析非线性能量消耗约束以及环境排放约束对路网中两种车型路径选择以及路网平衡状态下流量分布的影响。

路网中采用 BPR 路段行程时间函数如式(2),其参数分别为 0.15 与 4。仿真路网中各个路段自由流行程时间、路段长度及容量限制等固定参数以及 BPR 函数中的各参数如表1所示,假设电动汽车为 Nissan Leaf 2013 款车型,电池容量为  $24 \text{ kW} \cdot \text{h}^{-1}$ ,为了分析算法对模型求解的鲁棒性,假设该路网中的电动汽车的渗透率为 20%,且还设置了 0 的渗透率作为算法求解模型收敛性的比较。表1中  $E_a$  为路段  $a$  上环境排放容量 ( $\text{g} \cdot \text{h}^{-1}$ )。路网 O-D 对(1, 2)、(1, 3)、(4, 2)及(4, 3)的出行需求分别为 400、800、600 和 200。

假设在路段  $a$  上电池能量消耗的关系式为

$$E_t^{\alpha}(t_a) = 400 \left[ \frac{L_a}{t_a(v_a)} \right]^{-0.8384} \quad (23)$$

表1 N-D 路网各路段的性质

Table 1 Link characteristic for the N-D network

路段	行程时间 $t_{a0}/\text{min}$	容量限制 $C_a/\text{veh}$	路段长度 $L_a/\text{km}$	环境容量 $E_a/(\text{g} \cdot \text{h}^{-1})$	路段	行程时间 $t_{a0}/\text{min}$	容量限制 $C_a/\text{veh}$	路段长度 $L_a/\text{km}$	环境容量 $E_a/(\text{g} \cdot \text{h}^{-1})$
1-5	7	800	7	Null	8-2	9	550	9	Null
1-2	9	400	9	Null	9-10	10	550	10	2 576
4-5	9	200	9	Null	9-13	9	600	9	Null
4-9	12	800	12	Null	10-11	6	700	6	1 967
5-6	3	350	3	492	11-2	9	500	9	Null
5-9	9	400	9	1 686	11-3	8	300	8	Null
6-7	5	800	5	1 873	12-6	7	200	7	Null
6-10	13	250	13	1 522	12-8	14	400	14	Null
7-8	5	250	5	Null	13-3	11	600	11	Null
7-11	9	300	9	1 265					

式(23)为与路段流量相关的非线性宏观模型,当电动汽车途径路径 $p$ 时,其能量消耗必须满足约束式(13),否则该路径不是最优路径,路网中的蓝色部分为环境控制区域,为了保护该区域的环境,控制交通污染物的排放,特设严格的环境排放门槛 $E_a$ ,满足约束式(14),其中 $e(v_a)$ 具体表示如式(24),同样,式(24)也为与路段流量相关的非线性宏观模型。

$$e(v_a) = 0.2038 t_a(v_a) \exp\left[0.7962 \frac{L_a}{t_a(v_a)}\right] \quad (24)$$

首先,采用基于动态投影系统的算法求解数值仿真的例子。求解得到仿真实例中的目标函数会存在一系列可行解,只有当这一系列可行解逐渐收敛时达到平衡时,才获得了模型的最优解。图4分别描述了随机选择三条路段(路段1、路段5和路段9)的流量以及优化问题的目标函数在动态投影算法下的收敛过程。从图4中可以看到,路段上的流量会随着时间不断迭代,逐步趋于平衡达到收敛。且三条随机选取的路段流量都会以较少的迭代次数收敛于最优解,即路网中达到平衡状态时各路段上的两种车型的最优流量。除此之外由图5可以看到,带有复杂非线性边界约束的混合交通流路网优化问题目标函数的误差也会在迭代一定次数后小于算法中预先设置的阈值(算法误差收敛阈值设置为 $10^{-10}$ ),即达到收敛状态。其中目标函数收敛误差的定义为 $\left| \frac{obj^k - obj^{k-1}}{obj^{k-1}} \right|$ , $k$ 表示算法迭代次数, $obj$ 表示带有复杂非线性边界约束的混合交通流路网均衡优化问题的目标函数。

其次,在受到控制的路段上非线性环境约束对燃油汽车和电动汽车造成的额外出行成本可由2.2节分析中获得。由于仿真路网中存在20%的电动汽车,当电动汽车对路网造成一定的拥挤时,往往这个拥挤会增加燃油汽车的行程时间,导致其更多的环境排放。接下来分析能量消耗约束对电动汽车路径选择的影响。仿真中枚举了路网中所有的路径,以及各路径能量消耗与电池容量的关系式便于判断是否满足约束,这些信息帮助更为清晰地了解电动汽车在能量消耗约束下的路径选择情况。如表2所示,除了能量消耗约束外,还可以看到在路网达到平衡状态后各路径的流量(veh)以及一般出行成本情况(min)。对于每个O-D对而言,各条有效路径上的一般出行成本是相等的,它等于最小出行成本加上由非线性边界约束引起的额外成本。另外,还可以分析到表2中的各路径的平衡状态下的仿真结果满足第3节中所推导的平衡条件。最后,对于能

量消耗而言,可以从表2中看到,各路径能量消耗与电池容量的比值,即 $\frac{E_p}{E}$ 范围在0.68~1.43之间,意味着当这条路径被电动汽车选择时,它的比值是小于1的,而没被选择时,则是大于1的。

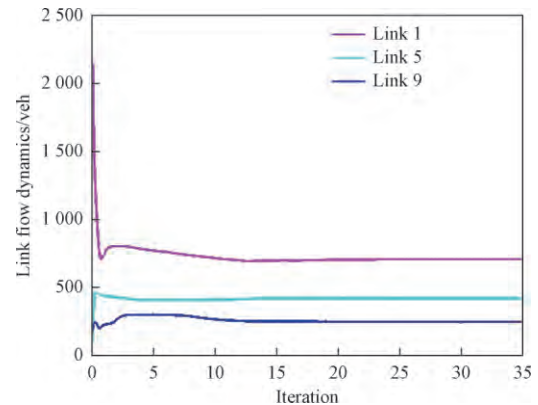


图4 路段流量收敛曲线

Fig. 4 Convergence curves of the link flow

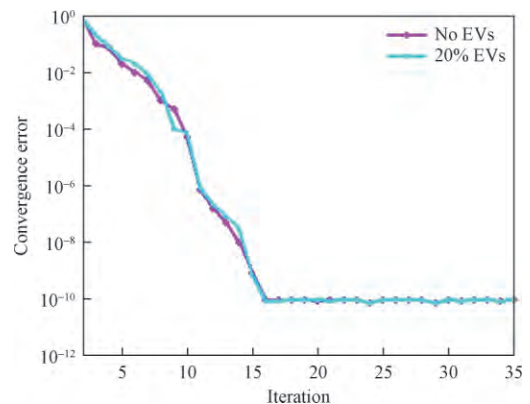


图5 优化问题目标函数收敛曲线

Fig. 5 Convergence curves of the user equilibrium objective function

## 5 结论

(1) 提出了一种基于动态投影系统且具有指数收敛性质的算法,求解路网中带有复杂非线性边界约束的混合交通流路网均衡问题。通过复杂非线性边界约束模型的求解过程以及动态投影算法求得模型最优解的收敛性分析,原始优化模型的最优解收敛于动态投影系统的平衡点。

(2) 路网中电动汽车能量消耗和燃油汽车环境排放与所面临的交通状态之间存在非线性的映射关系。

(3) 数值仿真例子验证了基于动态投影系统求解算法对于所提出的非线性边界约束双车型路网均衡分配问题的有效性,同时论证了研究中模型的理论推导。

表 2 均衡状态下的路径流量和一般出行成本

Table 2 Path flow and generalized travel cost under equilibrium condition

O-D	路径	流量/veh	一般出行成本/min	$E_p/E$	O-D	路径	流量/veh	一般出行成本/min	$E_p/E$
(1, 2)	2-18-11	0	42.61	1.02	(1, 3)	1-6-13-19	289	42.63	0.97
	1-5-7-9-11	255	37.09	0.88		1-5-7-10-16	201	42.63	0.87
	1-5-7-10-15	155	37.09	0.81		1-5-8-14-16	0	47.36	1.13
	1-5-8-14-15	0	41.83	1.19		1-6-12-14-16	280	42.63	0.98
	1-6-12-14-15	0	42.61	1.04		2-17-7-10-16	30	42.63	0.99
	2-17-7-9-11	0	42.61	1.08		2-17-8-14-16	0	47.36	1.17
	2-17-7-10-15	0	42.61	1.01		4-13-19	104	39.42	0.68
	2-17-8-14-15	0	47.35	1.23		4-12-14-16	96	39.42	0.68
	4-12-14-15	600	39.41	0.75		3-6-13-19	0	43.99	1.21
	3-5-7-9-11	0	43.97	1.20		3-5-7-10-16	0	43.99	1.13
(4, 2)	3-5-7-10-15	0	43.97	1.17	3-5-8-14-16	0	48.72	1.38	
	3-5-8-14-15	0	48.70	1.43	3-6-12-14-16	0	43.99	1.16	
	3-6-12-14-15	0	43.97	1.28					

参 考 文 献

- 赵蒙,安实,王健,等. 基于时空网络建模的分时租赁系统电动汽车优化调度方法[J]. 科学技术与工程, 2018, 18(23): 122-127  
Zhao Meng, An Shi, Wang Jian, et al. Space-time network modeling based electric vehicle optimal dispatching method for carsharing system[J]. Science Technology and Engineering, 2018, 18(23): 122-127
- He F, Yin Y F, Lawphongnitch S. Network equilibrium models with battery electric vehicles[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2014, 67: 306-319
- Jiang N, Xie C. Computing and analyzing mixed equilibrium network flows with gasoline and electric vehicles[J]. Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering, 2014, 29(8): 626-641
- Xu M, Meng Q, Liu K. Network user equilibrium problems for the mixed battery electric vehicles and gasoline vehicles subject to battery swapping stations and road grade constraints[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2017, 99: 138-166
- 连静,郑宁安,周雅夫,等. 基于电池荷电状态和行驶工况辨识的电动汽车续驶里程估算[J]. 科学技术与工程, 2016, 16(13): 1671-1815  
Lian Jing, Zheng Ning'an, Zhou Yafu, et al. Driving range estimation for electric vehicles based on battery soc and driving cycle identification[J]. Science Technology and Engineering, 2016, 16(13): 1671-1815
- 杨扬,姚恩建,王梅英,等. 电动汽车混入条件下的随机用户均衡分配模型[J]. 中国公路学报, 2015, 28(9): 91-97  
Yang Yang, Yao Enjian, Wang Meiyi, et al. Stochastic user equilibrium assignment model for electric vehicle under hybrid traffic condition[J]. China Journal of Highway and Transport, 2015, 28(9): 91-97
- Galus D, Waraich A, Noembrini F, et al. Integrating power systems, transport systems and vehicle technology for electric mobility impact assessment and efficient control[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2012, 3(2): 934-949
- Xu X D, Chen A, Cheng L. Reformulating environmentally constrained traffic equilibrium via a smooth gap function[J]. International Journal of Sustainable Transportation, 2015, 9(6): 419-430
- Mokhtar B, Hanif S, Shetty C. Nonlinear programming: Theory and algorithm[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc Press, 2005
- Sheffi Y. Urban transportation network[M]. New Jersey: Prentice Hall Press, 1985
- Xia Y, Feng G, Kamel M. Development and analysis of a neural dynamical approach to nonlinear programming problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(11): 2154-2159
- Xia Y. An extended projection neural network for constrained optimization[J]. Neural Computation, 2004, 16(4): 863-883
- Xia Y. Further results on global convergence and stability of globally projected dynamical systems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 122(3): 627-649

## A Dynamics Projected System Based Solution Algorithm for Mixed Network Equilibrium Model with Nonlinear Side Constraints

XU Ruo-chen , ZHONG Ren-xin\*

( School of Intelligent Systems Engineering , Sun Yat-sen University , Guangzhou 510006 , China)

**[Abstract]** Traffic equilibrium problems for electric vehicles ( EVs) with battery energy consumption and gaso-line vehicles ( GVs) with environmental emission constraints generally admit complex nonlinear constraints rendering the equilibrium problem difficult to solve , to address this challenge , a projected dynamics was proposed based algorithm. The complex nonlinear side-constrained traffic equilibrium model is converted into a variational inequality problem ( VIP) . A set of equivalent Karush-Kuhn-Tucker ( KKT) conditions are obtained to yield a nonlinear mixed complementarity reformulation of the equilibrium model. Based on the complementarity reformulation a projected dynamics whose equilibrium corresponds to the solution of the above VIP is devised. The projected dynamics can determine the general travel cost , equilibrium condition mixed with traffic flows and its congestion externality. Finally , a numerical example was conducted to evaluate the solution algorithm. The results show that the algorithm exponentially converges to the equilibrium point of the VIP , which proves the effectiveness and efficiency of the proposed algorithm.

**[Key words]** projected dynamics      variational inequality      nonlinear side-constraints      mixed traffic flow